Pochodna kierunkowa funkcji dwóch zmiennych

Definicja Niech będzie dana przestrzeń euklidesowa R^2, i zawarty w niej zbiór A.

Pochodną kierunkową funkcji $f: A \to R$ wzdłuż wektora jednostkowego $\vec{u} = [u_1, u_2] \in R^2$ w punkcie $x = (x_1, x_2) \in A$ nazywamy granicę

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{u}) - f(x)}{t}$$

o ile ta granica istnieje.

Przykład Niech będzie dana funkcja $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$

Uwaga Gradientem funkcji f nazywamy wektor

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = [2x+y, x-2y]$$

Jeżeli istnieje gradient funkcji f, to pochodna kierunkowa funkcji f w kierunku wektora $\vec{u}$ jest równa iloczynowi skalarnemu gradientu funkcji i wektora.

Czyli: Pochodna kierunkowa w kierunku wektora

$u = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ (długość tego wektora jest równa 1)

jest równa

$$\nabla_{\vec{u}} f(x) = \nabla f \circ \vec{u}$$

Zatem $\nabla_{\vec{u}} f(x,y) = [2x+y, x-2y] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] = \frac{4x-3y}{\sqrt{5}}$

a w kierunku wektora $\vec{v} = [1,0]$ mamy

$$\nabla_{\vec{v}} f(x,y) = [2x+y, x-2y] \circ [1,0] = 2x+3y = \frac{\partial f}{\partial x}$$

analogicznie

$$\nabla_{\vec{u}} f(x,y) = [2x+y, x-2y] \cdot [0,1] = x-2y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

dla wektora $\vec{u} = [0,1]$.